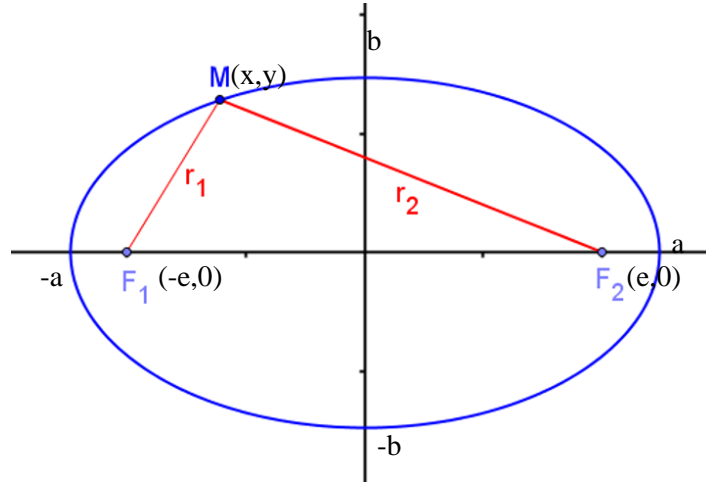


ELIPSA

Elipsa je skup tačaka u ravni s osobinom da je zbir rastojanja ma koje tačke od dviju datih tačaka (žiža) stalan broj.



r_1, r_2 su **potezi** (radijus vektori) elipse i važi za bilo koju tačku na elipsi $r_1 + r_2 = 2a$

a je **velika poluosa**, odnosno $2a$ je **velika osa**

b je **mala poluosa**, odnosno $2b$ je **mala osa**

$F_1(-e, 0)$ i $F_2(e, 0)$ su **žiže elipse** gdje je $e^2 = a^2 - b^2$. Rastojanje $F_1 F_2 = 2e$.

Jednačina elipse je : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ili $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Zadatak 1. *Odrediti jednačinu elipse, ako žiže imaju koordinate $(\pm 3, 0)$, a dužina veće ose jednaka je 12.*

Najprije iz podatka o žižama zaključimo da je $e = 3$.

Kako je $2a = 12 \Rightarrow a = 6$. (odnosno $a^2 = 36$)

Iskoristimo da je $e^2 = a^2 - b^2$

$$3^2 = 6^2 - b^2$$

$$9 = 36 - b^2$$

$$b^2 = 36 - 9$$

$$b^2 = 27$$

Zamijenimo u jednačinu elipse: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

Zadatak 2. Odrediti jednačinu elipse koja sadrži tačke $M(6,4)$ i $N(-8,3)$

Koordinate datih tačaka ćemo zamijeniti u jednačinu elipse, ali bolje da koristimo oblik $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

$$M(6,4) \rightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$b^2 6^2 + a^2 4^2 = a^2 b^2$$

$$36b^2 + 16a^2 = a^2 b^2$$

$$N(-8,3) \rightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$b^2 (-8)^2 + a^2 3^2 = a^2 b^2$$

$$64b^2 + 9a^2 = a^2 b^2$$

Sad uporedimo lijeve strane ove dvije jednakosti jer su im desne iste!

$$36b^2 + 16a^2 = 64b^2 + 9a^2$$

$$16a^2 - 9a^2 = 64b^2 - 36b^2$$

$$7a^2 = 28b^2$$

$$a^2 = 4b^2$$

Sada se vratimo u jednu od ove dvije jednakosti i zamijenimo dobijenu vrijednost.

$$a^2 = 4b^2$$

$$\underline{64b^2 + 9a^2 = a^2 b^2}$$

$$64b^2 + 9 \cdot 4b^2 = 4b^2 b^2$$

$$100b^2 = 4b^4$$

$$4b^4 - 100b^2 = 0$$

$$4b^2 (b^2 - 25) = 0$$

$$b^2 = 25 \rightarrow a^2 = 4 \cdot 25 \rightarrow a^2 = 100$$

Zamijenimo ovo u jednačinu elipse:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Zadatak 3. Neka je data jednačina elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$. Odrediti poluose i žiže date elipse.

Jednačina elipse je napisana u obliku $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ iz toga zaključujemo da je

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2.$$

$$b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

Da bismo odredili žiže treba da nađemo e . Po formuli je

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \sqrt{4 - 3} \Rightarrow e = 1$$

Dakle,

$F_1(e, 0)$ i $F_2(-e, 0)$. $F_1(1, 0)$ i $F_2(-1, 0)$.

Zadaci za vježbu:

1. Odrediti jednačinu elipse ako njena manja osa ima dužinu 6, a jedna žiža ima koordinate $F_1(-4, 0)$.
2. Napisati jednačinu elipse ako se dva njena tjemena nalaze u tačkama $A_1(8, 0)$ i $A_2(-8, 0)$, a žiže imaju koordinate $(\pm 5, 0)$.
3. Napisati jednačinu elipse koja sadrži tačku $A(3, \sqrt{2})$, a veća osa joj je $2a = 2\sqrt{15}$.